ثانوية عراب عبد القادر
شعبة رياضي

السنة الدراسية 2025-2026
المدة : 1ساعة و 30 دقيقة

الفرض الأول للفصل الأول

التمرين 1

أ.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $1+x \leq e^x$

2) أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$ $x \prec 1-e^{-x} \prec 0$:

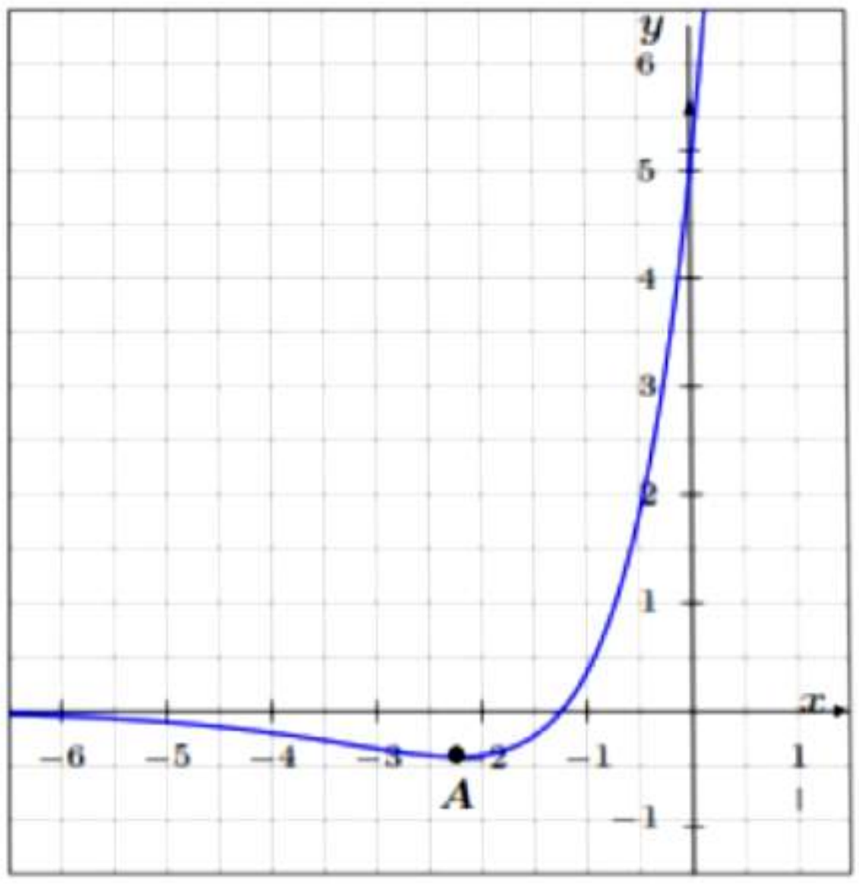
ب-استنتج أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$ $0 \leq 1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x} \leq \frac{x^3}{6}$:

ج-بين أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1-x-e^{-x}}{x^2} = \frac{-1}{2}$

التمرين 2

g الدالة المعرفة و القابلة للاشتقاق على $]-\infty;1]$ بـ : $g(x) = (ax+b)e^x - 1$ (a و b عددان حقيقيان).

I) في الشكل أدناه، $(\mathcal{C}')$ هو التمثيل البياني للدالة g' مشتقة الدالة g.



1) اذا علمت أن $(\mathcal{C}')$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $-\frac{5}{4}$ ، و يقطع حامل محور التراتيب في النقطة ذات الترتيبة 5 ، وأنه يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل في النقطة A ذات الفاصلة $-\frac{9}{4}$.

ا) بقراءة بيانية ادرس اتجاه تغير الدالة g، ماذا تمثل النقطة A؟

ب) عين العددين a و b.

(في باقي التمرين نضع $a=4$ و $b=1$)

2) ا) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة g على المجال $]-\infty;1]$.

ب) احسب $g(0)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty;1]$.

Scanné avec CamScanner

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;1]$ بـ : $f(x)=x-(4x-3)e^x$

و ليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ا) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم بين أن المنحنى $(\mathcal{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x$.

ب) ادرس وضعية المنحنى $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ) مع تحديد نقطة تقاطعهما.

2) ا) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. (لاحظ أن $f'(x)=-g(x)$).

ب) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $-2<\alpha<-\frac{5}{4}$ و $\frac{3}{4}<\beta<1$.

3) ا) اكتب معادلة لـ (Δ') مماس $(\mathcal{C})$ الذي يوازي (Δ)، ثم ارسم المستقيمين (Δ) و (Δ') و المنحنى $(\mathcal{C})$.

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود و عدد حلول المعادلة $(4x-3)e^x=m$.

4) لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]-\infty;1]$ بـ : $h(x)=(4x-3)e^x$.

ا) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty;1]$ فإن : $h(x)=2h'(x)-h''(x)$.

مهما كان السؤال صعب تفكر أن الاجابة
موجودة في أحد الدروس التي تطرقنا لها فقط
فكر كيف تستخدم الدرس بطريقة جيدة للوصول
إلى الحل

Scanné avec CamScanner

حل التمرين الأول

I.

1) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $1+x\le e^x$

نفرض الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي $h(x)=e^x-x-1$

لندرس تغيرات الدالة h:

• النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x-x-1=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x-x-1=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(1-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)=+\infty$

• المشتقة : $h'(x)=e^x-1$

• جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

من خلال الجدول نستنتج أن الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى عند 0 هي 0

إذن $h(x)\succ 0$ ومنه $e^x-x-1\succ 0$ إذن $e^x\succ x+1$

2) أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$: $0\prec 1-e^{-x}\prec x$

• لدينا $x\succ 0$ أي $-x\prec 0$ ومنه $e^{-x}\prec e^0$ ومنه $e^{-x}\prec 1$ إذن $(1).....0\prec 1-e^{-x}$

• لدينا $e^x\succ x+1$ بإستبدال x ب $-x$ نجد $e^{-x}\succ -x+1$ ومنه $x\succ 1-e^{-x}$ أي $(2).....1-e^{-x}\prec x$

من خلال (1) و (2) نجد $0\prec 1-e^{-x}\prec x$

ث- استنتاج أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$: $0\le 1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}\le\frac{x^3}{6}$

• نفرض الدالة g حيث $g(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}$

دراسة إتجاه تغير الدالة g : لدينا $g'(x)=-1+x+e^{-x}$

مما سبق نجد أن $g'(x)=-1+x+e^{-x}\succ 0$ و بالتالى الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}^+$

إذن لدينا : $x\succ 0$ أي $g(x)\succ g(0)$ ومنه $1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}\succ 1\succ 0$ ومنه $(1).....1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}\succ 0$

Scanné avec CamScanner

• لنفرض الدالة k حيث $k(x)=\frac{x^3}{6}-1+x-\frac{x^2}{2}+e^{-x}$

لدينا $k'(x)=\frac{x^2}{2}+1-x-e^{-x}$ نلاحظ أن $k'(x)=g(x)\succ 0$

ومنه الدالة k متزايدة تماما على $\mathbb{R}^+$

إذن لدينا : $x\succ 0$ أي $k(x)\succ k(0)$ ومنه $\frac{x^3}{6}-1+x-\frac{x^2}{2}+e^{-x}\succ 0$ إذن $(2).....1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}\prec\frac{x^3}{6}$

إذن من خلال (1) و (2) نجد $0\prec 1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}\prec\frac{x^3}{6}$

ج- تبين أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{1-x-e^{-x}}{x^2}=-\frac{1}{2}$

لدينا $0\prec 1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}\prec\frac{x^3}{6}$ أي $-\frac{x^2}{2}\prec 1-x-e^{-x}\prec\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}$ ومنه $-\frac{1}{2}\prec\frac{1-x-e^{-x}}{x^2}\prec\frac{x}{6}-\frac{1}{2}$

بما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{x}{6}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ وباستعمال النهاية بالمقارنة نجد $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\frac{1-x-e^{-x}}{x^2}=-\frac{1}{2}$

حل التمرين 2

(I

1 1 اشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$		$-5/4$		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

لما : $x\in[-\frac{5}{4};+\infty[$: g متزايدة تماما

لما : $x\in]-\infty;-\frac{5}{4}]$: g متناقصة تماما.

A تمثل نقطة انعطاف لـ $\mathcal{C}$. تعيين العددين a و b :

لدينا : $g'(x)=(ax+a+b)e^x$

أي : $\begin{cases}g'(-\frac{5}{4})=0\\ g(0)=5\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}-\frac{a}{4}+b=0\\ a+b=5\end{cases}$ و $a=4$ و $b=1$.

Scanné avec CamScanner

2 . 1 حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة g على المجال $]-\infty;1]$:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (4xe^x + e^x - 1) = -1$$

لدينا : $g'(x) = (4x+5)e^x$

x	$-\infty$		$-5/4$		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↘	-2.15	↗	12.6

ب حساب $g(0)$ ثم استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty;1]$:

لدينا : $g(0) = 0$, اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		0		1
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II

1 . 1 حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x - 4xe^x + 3e^x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y) = \lim_{x\to-\infty} (-4xe^x + 3e^x) = 0$$

$(\mathcal{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = x$.

ب دراسة وضعية المنحنى $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ) :

اشارة : $f(x) - y = e^x(-4x+3)$

x	$-\infty$		$3/4$		1
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	

لما : $x \in]-\infty;\frac{3}{4}[$ $(\mathcal{C})$ فوق (Δ)

لما : $x \in]\frac{3}{4};1]$ $(\mathcal{C})$ تحت (Δ)

$(\mathcal{C})$ يقطع (Δ) عند $B(\frac{3}{4};\frac{3}{4})$.

2 . 1 دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا :

$$f'(x) = 1 - (4e^x + e^x(4x-3)) = 1 - (1+4x)e^x = -g(x)$$

f متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ و متناقصة تماما على $[0;1]$.

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$1-e$

Scanné avec CamScanner

ب تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $-2<\alpha<-\frac{5}{4}$ و $\frac{3}{4}<\beta<1$:

f مستمرة و متزايدة تماما على $]-2;-\frac{5}{4}[$ و $\begin{cases} f(-2)\approx -0.51 \\ f(-\frac{5}{4})\approx 1.04 \end{cases}$ اي : $f(-2)\times f(-\frac{5}{4})<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-2<\alpha<-\frac{5}{4}$.

كذلك f مستمرة و متناقصة تماما على $]\frac{3}{4};1[$ و $\begin{cases} f(\frac{3}{4})\approx 0.75 \\ f(1)\approx -1.72 \end{cases}$ أي : $f(\frac{3}{4})\times f(1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $\frac{3}{4}<\beta<1$.

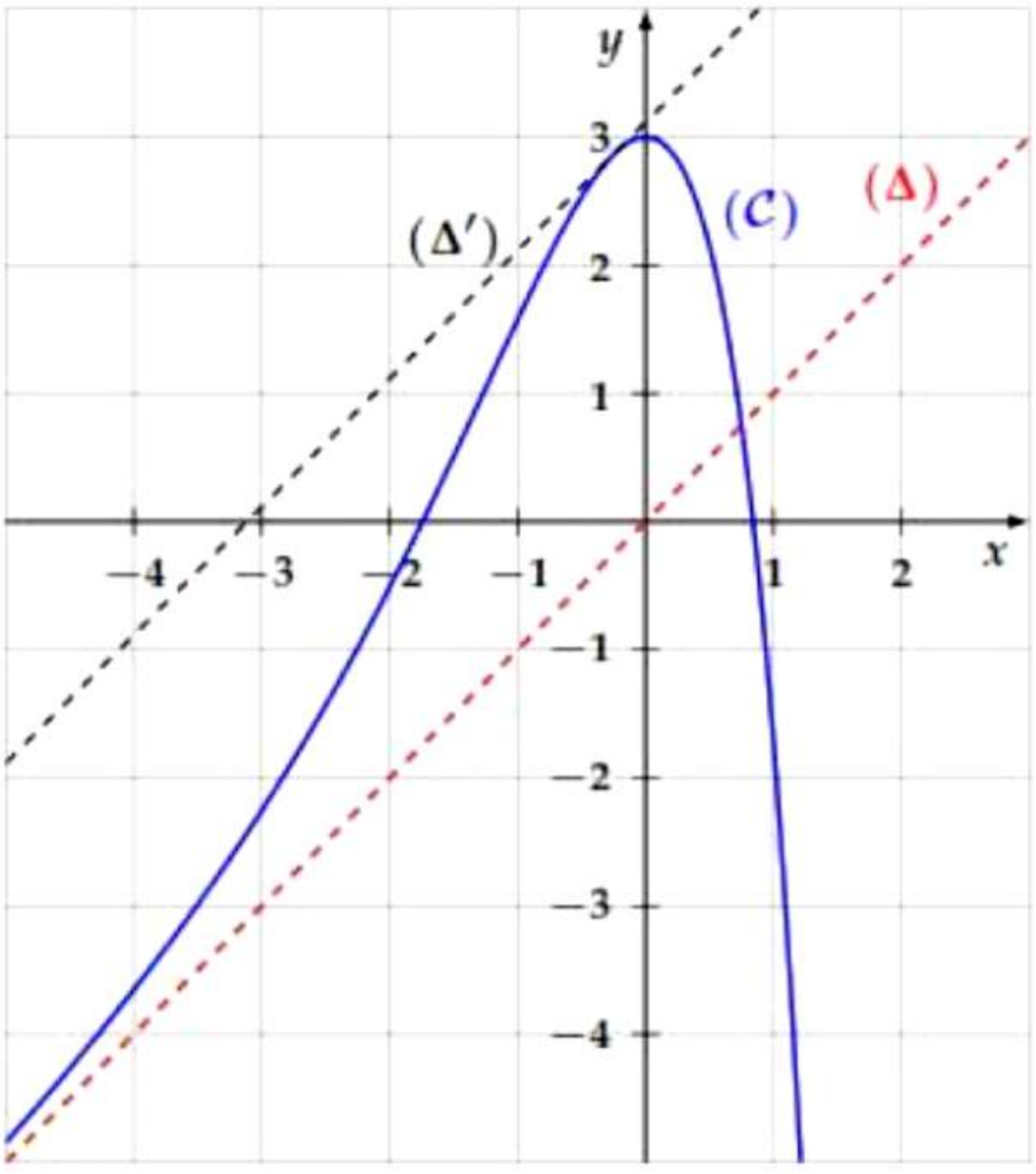
3 **ا** كتابة معادلة لـ (Δ') مماس (C) الذي يوازي (Δ) :

(Δ') يوازي (Δ) يعني أن لهما نفس الميل $f'(x_0)=1$, تكافئ : $1-e^{x_0}(4x_0+1)=1$ ومنه : $x_0=-\frac{1}{4}$

معادلة المماس (Δ') :

$$y=1(x+\frac{1}{4})+f(-\frac{1}{4})=x+4e^{-\frac{1}{4}}$$

الرسم :



ب المناقشة البيانية :

$(4x-3)e^x=m$ تكافئ $x-(4x-3)e^x=x-m$ تكافئ : $f(x)=x-m$ الحلول عبارة عن فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيمات المائلة (ميلها 1)

المستقيمات المساعدة هي : $y=x$, $y=x+4^{-\frac{1}{4}}$ و $y=x-e$ (مستقيم ميله 1 و يشمل النقطة $C(1;1-e)$).

- $-m<-e$ أي : $m>e$: لا يوجد حلول.
- $0\le -m\le -e$ أي : $e\le m\le 0$: حل وحيد.
- $0<-m<4e^{-\frac{1}{4}}$ أي : $0>m>-4e^{-\frac{1}{4}}$: حلان متمايزان.
- $-m=4e^{-\frac{1}{4}}$ أي $m=-4e^{-\frac{1}{4}}$: حل وحيد.
- $-m>4e^{-\frac{1}{4}}$ أي : $m<-4e^{-\frac{1}{4}}$: لا يوجد حلول.

Scanné avec CamScanner

4 | 1 تبيان أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty;1]$ فإن : $h(x)=2h'(x)-h''(x)$:

$h(x)=(4x-3)e^x$,$h'(x)=(4x+1)e^x$,$h''(x)=(4x+5)e^x$

ومنه : $h(x)=2h'(x)-h''(x)$

Scanné avec CamScanner